EXERCICES SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 3

Dans le plan complexe P, muni d'un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1$, $z_B = i$.

On pose $Z = \dfrac{z-1}{iz+1}$ pour tout $z \neq i$

1. Déterminer les éventuelles valeurs de z telles que : $Z = 1 + 2i$

2 . a) Montrer que $|\,iz+1\,| = |\,z-i\,|$

b) Déterminer et tracer l'ensemble (E_1) des points M d'affixes z tels que $|\,Z\,| = 1$

3. a) En posant $z = x + iy$ où x et y sont des réels , vérifier que la partie réelle de Z est

$$Re(Z) = \frac{x+y-1}{x^2+(1-y)^2} \quad \text{et que la partie imaginaire} \quad Im(Z) = \frac{-x^2-y^2+x+y}{x^2+(1-y)^2}$$

b) Déterminer et tracer l'ensemble (E_2) des points M d'affixes z tels que Z soit un nombre réel.

c) Déterminer et tracer l'ensemble (E_3) des points M d'affixes z tels que Z soit un imaginaire pur .

Exercice 4

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = 5\sqrt{2}\,(1+i)$ et $z_2 = -5(1+i\sqrt{3})$.

1) Déterminer le module et un argument des nombres complexes : z_1 , z_2 , $\overline{z_1}$, $\dfrac{1}{z_1}$.

2) Soit Z le nombre complexe tel que $z_1 Z = z_2$.
Ecrire Z sous forme algébrique , puis sous forme trigonométrique.

3) Déduisez-en les valeurs exactes de $\cos(\dfrac{13\pi}{12})$ et $\sin(\dfrac{13\pi}{12})$.

Exercice 5

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) suivante :

$z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$ où a est réel.

1. a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-2i(1-a)^2$.
b) Déterminer en fonction de a les solutions z_1 et z_2 de (E).